논리철학연습 과제

Chapter 3 - System S4, S5, B, TRIV and VER

과학사 및 과학철학 협동과정 2004-20309 정동욱 | 제출일 : 2004.4.9

3.1 S4에서 다음을 증명하라.

(a) $L(p\supset q)\supset L(Lp\supset Lq)$

4 $[p\supset p/p]$	(1) $L(p\supset q)\supset LL(p\supset q)$
K×DR1	(2) $LL(p\supset q)\supset L(Lp\supset Lq)$
(1),(2)×Syll	(3) $L(p\supset q)\supset L(Lp\supset Lq)$

(b) $(Lp\vee Lq)\equiv L(Lp\vee Lq)$

T $[Lp\vee Lq/p]$	(1) $L(Lp\vee Lq)\supset(Lp\vee Lq)$
PC9 $[Lp/p, Lq/q]$ ×DR1	(2) $LLp\supset L(Lp\vee Lq)$
PC10 $[Lp/p, Lq/q]$ ×DR1	(3) $LLq\supset L(Lp\vee Lq)$
(2),(3)×PC	(4) $(LLp\vee LLq)\supset L(Lp\vee Lq)$
(4),S4(2)×Eq:	(5) $(Lp\vee Lq)\supset L(Lp\vee Lq)$
(1),(5)×PC	(6) $(Lp\vee Lq)\equiv L(Lp\vee Lq)$

(c) $ML(p\supset LMp)$

T2 $[Mp/p]$	(1) $M(Mp\supset LMp)$
S4(2) $[Mp/p]$	(2) $LMp\equiv LLMp$
(1),(2)×Eq:	(3) $M(Mp\supset LLMp)$
(3)×Def M×PC	(4) $M(L\sim p\vee LLMp)$
K4 $[\sim p/p, LMp/q]$	(5) $(L\sim p\vee LLMp)\supset L(\sim p\vee LMp)$
(5)×DR3	(6) $M(L\sim p\vee LLMp)\supset ML(\sim p\vee LMp)$
(4),(6)×MP	(7) $ML(\sim p\vee LMp)$
(7)×PC	(8) $ML(p\supset LMp)$

(d) $M(Lp\supset Mq)\supset M(p\supset q)$

K7	(1) $(Lp\supset Mq)\equiv M(p\supset q)$
(1)×Eq:	(2) $M(Lp\supset Mq)\equiv MM(p\supset q)$
S4(1) $[p\supset q/p]$	(3) $MM(p\supset q)\supset M(p\supset q)$
(2),(3)×Syll	(4) $M(Lp\supset Mq)\supset M(p\supset q)$

3.2 A가 임의의 긍정적 양상성(즉 일련의 L들이나 M들)일 때, $L(p\supset q)\supset L(Ap\supset Aq)$가 S4의 정리임을 보여라.

A^n을 n개의 연속된 긍정적양상성이라고 이름붙이고 시작하자.

(i) $n=1$일 때,

4,K×DR1	$L(p\supset q)\supset L(Lp\supset Lq)$
4,K9 ×DR1	$L(p\supset q)\supset L(Mp\supset Mq)$

에 의해 $L(p\supset q)\supset L(A^1p\supset A^1q)$가 성립한다. 이 정리를 *이라 이름 붙이자.

(ii) $n=k$일 때 주어진 식이 S4의 정리라 가정하면,

가정에 의해	(1) $L(p\supset q)\supset L(A^kp\supset A^kq)$
$*[A^kp/pA^kq/q]$	(2) $L(A^kp\supset A^kq)\supset L(A^1A^kp\supset A^1A^kq)$
(2)×연산	(3) $L(A^kp\supset A^kq)\supset L(A^{k+1}p\supset A^{k+1}q)$
(1),(3)×Syll	(4) $L(p\supset q)\supset L(A^{k+1}p\supset A^{k+1}q)$

에 의해 $n=k+1$일 때에도, 주어진 식이 S4의 정리가 된다.

(i), (ii)에 의해 모든 자연수 n에 대해 $L(p\supset q)\supset L(A^np\supset A^nq)$이 S4의 정리이다.

3.3 T에 K 대신 $*L(p\supset q)\supset L(Lp\supset Lq)$를 놓은 결과가 연역적으로 S4와 동치라는 사실을 보여라.

체계 S4에서 *를 도출하는 것은 3.1(a)에서 이미 증명해보였으므로,
체계 T의 K를 제외한 모든 정리들과 규칙, 그리고 *를 이용해 K와 4를 도출해낼 수 있기만 하면 된다.

(i) K의 도출

*	(1) $L(p\supset q)\supset L(Lp\supset Lq)$
T $[Lp\supset Lq/p]$	(2) $L(Lp\supset Lq)\supset(Lp\supset Lq)$
(1),(2)×Syll	(3) $L(p\supset q)\supset(Lp\supset Lq)$ …… **K 도출 성공**

(ii) 4의 도출

$*[p\supset p/p,p/q]$	(1) $L((p\supset p)\supset p)\supset L(L(p\supset p)\supset Lp)$
PC	(2) $((p\supset p)\supset p)\equiv p$
PC×N	(3) $L(p\supset p)$
(3)×PC	(4) $(L(p\supset p)\supset Lp)\equiv Lp$
(1),(2),(4)×Eq:	(5) $Lp\supset LLp$ …… **4 도출 성공**

3.4 p.55에 열거한 양상성들이 S4에서 서로 동치이지 않다는 사실을 증명하라.

S4에서도 역이 성립하지 않는 T, T1에 의해,
$Lp\supset p$, $p\supset Mp$, $LMLp\supset MLp$, $LMLp\supset LMp$, $MLp\supset MLMp$, $LMp\supset MLMp$라는 양상성들간의 상호 함축관계를 직관적으로 알 수 있다. 하지만 나머지의 관계에 대해서는 자세히 따져볼 필요가 있다.

(i) $Lp\supset LMLp$이나 $LMLp\not\supset Lp$
두 개의 세계 w_1, w_2만 있고, w_1Rw_2, w_1Rw_1, w_2Rw_2인 설정이 되어 있으며, $V(p,w_1)=0$, $V(p,w_2)=1$인 모델을 가정하면, $V(LMLp\supset Lp,w_1)=0$, $V(LMLp\supset Lp,w_2)=0$이 되어 $LMLp\not\supset Lp$임을 알 수 있다.

(ii) $MLMp\supset Mp$이나 $Mp\not\supset MLMp$
두 개의 세계 w_1, w_2만 있고, w_1Rw_2, w_1Rw_1, w_2Rw_2인 설정이 되어 있으며, $V(p,w_1)=1$, $V(p,w_2)=0$인 모델을 가정하면, $V(Mp\supset MLMp,w_1)=0$이 되어 $Mp\not\supset MLMp$임을 알 수 있다.

(iii) $MLp\not\equiv LMp$
① $MLp\not\supset LMp$
세 개의 세계 w_1, w_2, w_3만 있고, 재귀성과 w_1Rw_2, w_1Rw_3인 설정이 되어 있으며, $V(p,w_1)=0$, $V(p,w_2)=1$, $V(p,w_1)=0$인 모델을 가정하면, $V(MLp\supset LMp,w_1)=0$이 되어 $MLp\not\supset LMp$임을 알 수 있다.
② $LMp\not\supset MLp$
두 개의 세계 w_1, w_2만 있고, 자기자신과 상대방 모두 접근가능한 설정이 되어 있으며, $V(p,w_1)=1$, $V(p,w_2)=0$인 모델을 가정하면, $V(LMp\supset MLp,w_1)=0$, $V(LMp\supset MLp,w_2)=0$이 되어 $LMp\not\supset MLp$임을 알 수 있다.

3.5 $n\neq m$인 경우, $L^np\equiv L^mp$는 T의 정리가 아니라는 사실을 증명하라.

이 증명은 $L^np\supset L^{n+1}p$이 T의 정리가 아니라는 것만을 보이면 충분하다.
또한 $L^np\supset L^{n+1}p$이 성공적이지 않은 T-model이 있으면 $L^np\supset L^{n+1}p$은 T의 정리가 아니다.
다음과 같은 모델 $<W,R,V>$를 가정하자.

(i) $W=\{w_1, w_2, \cdots, w_{n+2}\}$

(ii) 재귀성 & $w_k R w_{k+1}$ $(1 \le k \le n+1)$

(iii) $V(p, w_k)=1$ $(1 \le k \le n+1)$, $V(p, w_{n+2})=0$

위 세가지 조건을 지닌 모델에서

규칙에 따라 계속 값을 따져보면, 결국에 $V(L^n p, w_1)=1$, $V(L^{n+1} p, w_1)=0$이 되어 $V(L^n p \supset L^{n+1} p, w_1)=0$이 된다.

따라서, $L^n p \supset L^{n+1} p$은 T의 정리가 아니고, 그에 따라 $L^n p \equiv L^m p$는 T의 정리가 아니다.

3.6 S4.2는 S4 + G1 $MLp \supset LMp$ 이다. 네가지의 긍정적 양상성, 즉 L, ML, LM, M을 가지며, 강도의 면에서 나열된 순서대로임을 증명하라.

(i) T, T1과 G1에 의해 네가지 양상성들간의 강도비교는 매우 쉽게 알 수 있다.

(ii) S4에 더 있었던 두 개의 양상성에 대해 살펴보자.

① $MLMp \equiv LMp$

G1 $[Mp/p]$	(1) $MLMp \supset LMMp$
(1),S4(3)×Eq:	(2) $MLMp \supset LMp$
T1 $[LMp/p]$	(3) $LMp \supset MLMp$
(2),(3)×PC	(4) $MLMp \equiv LMp$

② $LMLp \equiv MLp$

(4) $[\sim p/p]$×PC	(5) $LMLp \equiv MLp$

①과 ②에 의해 S4의 양상성 두 개가 S4.2에서는 사라지게 됨을 알 수 있다.

3.7 S5에서 다음을 증명하라.

(a) $L(Lp \supset Lq) \vee L(Lq \supset Lp)$

S5(5)	(1) $L(p \vee Mq) \equiv (Lp \vee Mq)$
(1) $[\sim Lp/p, Lq/q]$	(2) $L(\sim Lp \vee MLq) \equiv (L \sim Lp \vee MLq)$
(2),S4(2),S5(3)	(3) $L(\sim Lp \vee Lq) \equiv (\sim Lp \vee Lq)$
(3)×PC	(4) $L(Lp \supset Lq) \equiv (Lp \supset Lq)$
(4) $[q/p, p/q]$	(5) $L(Lq \supset Lp) \equiv (Lq \supset Lp)$
PC	(6) $(Lp \supset Lq) \vee (Lq \vee Lp)$
(6),(4),(5)×Eq:	(7) $L(Lp \supset Lq) \vee L(Lq \supset Lp)$

(b) $L(Mp \supset) \equiv L(p \supset Lq)$

S5(4) $[q/p, \sim Mp/q]$	(1) $L(q \vee L \sim Mp) \equiv (Lq \vee L \sim Mp)$
(1)×PC×S5(?)	(2) $L(Mp \supset q) \equiv (Mp \supset Lq)$
S5(4) $[\sim p, p, q/q]$	(3) $L(\sim p \vee Lq) \equiv (L \sim p \vee Lq)$
(3)×PC	(4) $L(p \supset Lq) \equiv (Mp \supset Lq)$
(2),(4)×Eq:	(5) $L(Mp \supset q) \equiv L(p \supset Lq)$

(c) $MLp \supset (Mq \supset L(p \wedge Mq))$

S5(7) $[q/p, p/q]$	(1) $(Lp \wedge Mq) \equiv M(Lp \wedge q)$
E $[Lp \wedge q/p]$	(2) $M(Lp \wedge q) \supset LM(Lp \wedge q)$
(2),(1)×Eq:	(3) $M(Lp \wedge q) \supset L(Lp \wedge Mq)$
(1),(3)×Eq:	(4) $(Lp \wedge Mq) \supset L(Lp \wedge Mq)$
(4),S5(3)×Eq:	(5) $(MLp \wedge Mq) \supset L(Lp \wedge Mq)$
(5),T×PC,DR1	(6) $(MLp \wedge Mq) \supset L(p \wedge Mq)$
(6)×PC	(7) $MLp \supset (Mq \supset L(p \wedge Mq))$

3.8 S5가 다음과 같이 공리화될 수 있음을 보여라.

(a) D + E

(b) S4 + B : E를 도출하면 성공

B [Mp/p]	(1) $Mp\supset LMMp$
(1),S4(3)×Eq:	(2) $Mp\supset LMp$ …… E

(c) K + E1 $LMLp\supset p$, E2 $MLp\supset LMLLp$: T와 E를 도출하면 성공

(i) E의 도출

E2	(1) $MLp\supset LMLLp$
E1 [Lp/p]	(2) $LMLLp\supset Lp$
(1),(2)×Syll	(3) $MLp\supset Lp$
(3) [$\sim p/p$] ×PC	(4) $Mp\supset LMp$ …… E

(ii) T의 도출

(3) [MLp/p]	(5) $MLMLp\supset LMLp$
(5),E1 ×Syll	(6) $MLMLp\supset p$
E1 [$\sim p/p$] ×Trans	(7) $p\supset MLMp$
(7) [Lp/p]	(8) $Lp\supset MLMLp$
(9),(6)×Syll	(9) $Lp\supset p$ …… T

(d) K + A 나 K + B 어떤 것도 그 자체만으로 T, KB 또는 K4를 제공할 수 없다는 사실을 보여라.

3.9 S5가 PC, US, MP, T와 규칙 * $\vdash \alpha\supset\beta \rightarrow \alpha\supset L\beta$로 공리화될 수 있음을 보여라. (단, α의 모든 변향들이 양상 연산자의 범위 내에 들어 있다고 가정하라)

위의 공리적 기초들로 K, E 그리고 규칙 N을 도출해내야 한다.

(i) 규칙 N의 도출

Given	(1) α
PC	(2) $M(p\supset p)\supset\alpha$
(2)×*	(3) $M(p\supset p)\supset L\alpha$
D1	(4) $M(p\supset p)$
(3),(4)×MP	(5) $L\alpha$ …… 규칙 N 도출 성공

(ii) K의 도출

T	(1) $Lp\supset p$
T [q/p]	(2) $Lq\supset q$
(1),(2)×PC	(3) $(Lp\wedge Lq)\supset(p\wedge q)$
(3)×*	(4) $(Lp\wedge Lq)\supset L(p\wedge q)$
(4) [$p\supset q/p,p/q$]	(5) $(L(p\supset q)\wedge Lp)\supset L((p\supset q)\wedge p)$
(5)×PC	(6) $(L(p\supset q)\wedge Lp)\supset Lq$
(6)×PC	(7) $L(p\supset q)\supset(Lp\supset Lq)$ …… K 도출 성공

(iii) E의 도출

PC	(1) $Mp\supset Mp$
(1)×*	(2) $Mp\supset LMp$ …… E 도출 성공

3.10 * $L(p\vee Lq)\supset(Lp\vee Lq)$를 T에 덧붙이면 연역적으로 S5와 동치인 체계가 나온다는 것을 보여라.

체계 T의 공리적 기초들과 *를 이용하여 E를 도출해내면 된다.

* [$Mp/p,\sim p/q$]	(1) $L(Mp\vee L\sim p)\supset(LMp\vee L\sim p)$
PC	(2) $\sim p\vee p$

(2) [$L\sim p/p$] Def M	(3) $Mp \vee L\sim p$
(3)×N	(4) $L(Mp \vee L\sim p)$
(1),(4)×MP	(5) $LMp \vee L\sim p$
(6)×PC	(6) $Mp \supset LMp$ …… E

3.11 K+E가 wRw'이고 wRw''이면 $w'Rw''$인 프레임의 집합에 대해 건전함을 증명하라.

K의 모든 정리들은 모든 프레임에서 타당하므로 논외로 하고,

E가 성공적이지 않은 model이 있다면 그 model에서는 $V(Mp \supset LMp, w) = 0$인 w가 존재한다. 즉,

(i) w가 볼 수 있는 세계 중에 $V(Mp, w') = 0$인 w'이 존재하고,

(ii) w가 볼 수 있는 세계 중에 $V(p, w'') = 1$인 w''이 존재해야 한다.

그런데 문제에서 제시한 프레임의 집합에서는 이러한 모델이 불가능하다.

왜냐하면, (i)에 의해 w'이 볼 수 있는 모든 세계 w'''에 대해 $V(p, w''') = 0$이어야 한다. 그러나 문제의 조건에서 w'은 w가 보는 다른 세계들을 모두 보아야만 한다. 그렇게 되면 w'은 $V(p, w'') = 1$인 w''을 반드시 봐야하는 상황이 만들어지는데, 이는 (i)과 모순이다.

따라서, 문제에서 제시된 프레임 집합에서는 E가 성공적이지 않은 model이 존재할 수 없다.

따라서 K+E는 위의 프레임 집합에서 항상 타당하며, 즉 건전하다.

3.12 B에서 증명하라

(a) $(MLp \wedge MLq) \supset LM(p \wedge q)$

B [$\sim p/p$] ×PC	(1) $MLp \supset p$ …… (다른 문제에서 사용하기 위해 B1이라 부르자.
(1) [q/p]	(2) $MLq \supset q$
(1),(2)×PC	(3) $(MLp \wedge MLq) \supset (p \wedge q)$
B [$p \wedge q/p$]	(4) $(p \wedge q) \supset LM(p \wedge q)$
(3),(4)×Syll	(5) $(MLp \wedge MLq) \supset LM(p \wedge q)$

(b) $MLp \supset LMp$

B1	(1) $MLp \supset p$
B	(2) $p \supset LMp$
(1),(2)×Syll	(3) $MLp \supset LMp$

3.13 B에서 N과 K 없애고, R*를 덧붙임으로써 공리화될 수 있음을 보여라.

N,K를 제외한 B의 공리적 기초와 R*를 이용해 N과 K를 도출해내야 한다.

(i) N의 도출

Given	(1) α
D1	(2) $M(p \supset p)$
PC	(3) $M(p \supset p) \supset \alpha$
(3)×R*	(4) $LM(p \supset p) \supset L\alpha$
B [$p \supset p/p$]	(5) $(p \supset p) \supset LM(p \supset p)$
(5),(4)×Syll	(6) $(p \supset p) \supset L\alpha$
(6),PC×MP	(7) $L\alpha$ …… N

(ii) K의 도출 (K8은 K없이도 PC와 R*로 도출되기 때문에 사용가능)

K8 [$Lp/p, Lq/q$]	(1) $M(Lp \wedge Lq) \supset (MLp \wedge MLq)$
(1),B1 ×PC	(2) $M(Lp \wedge Lq) \supset (p \wedge q)$
(2)×R*	(3) $LM(Lp \wedge Lq) \supset L(p \wedge q)$
B [$Lp \wedge Lq/p$]	(4) $(Lp \wedge Lq) \supset LM(Lp \wedge Lq)$
(3),(4)×Syll	(5) $(Lp \wedge Lq) \supset L(p \wedge q)$ …… K2

(5)[$p \supset q/p,p/q$]　(6) $(L(p \supset q) \wedge Lp) \supset L((p \supset q) \wedge p)$
(6)×PC　(7) $(L(p \supset q) \wedge Lp) \supset Lq$
(7)×PC　(8) $L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$ …… K 도출 성공

3.14 $\vdash L\alpha \rightarrow \vdash \alpha$는 KB의 규칙이 아님을 보여라.

(i) $LM(p \supset p)$는 KB의 정리이다.
B [$p \supset p/p$]　(1) $(p \supset p) \supset LM(p \supset p)$
PC　(2) $p \supset p$
(1),(2)×MP　(3) $LM(p \supset p)$

(ii) 그러나 $M(p \supset p)$는 KB의 정리가 아니다.
KB는 '아무도 안보는 세계가 있는' 프레임 집합에서 건전하다. 왜냐하면 B $p \supset LMp$는 아무도 안보는 설정에서 항상 타당하기 때문이다. 그러나 그러한 프레임에서 $M(p \supset p)$은 절대 타당할 수 없다. 따라서 $M(p \supset p)$는 KB의 정리가 아니다.

(i)과 (ii)에 의해 $\vdash L\alpha \rightarrow \vdash \alpha$가 적용될 수 없는 체계 KB 내의 반례를 보였으므로, $\vdash L\alpha \rightarrow \vdash \alpha$는 KB의 규칙이 아니다.

3.15 K가 하나의 동치 규칙 $L(p \supset q) \equiv (Lp \supset Lq)$에 의해 T는 PC로 붕괴함을 보여라.

위의 규칙에 포함되어 있는 $(Lp \supset Lq) \supset L(p \supset q)$를 K*라고 하자.
K*를 포함한 T에서 $p \supset Lp$라는 정리가 있다면, PC로 붕괴한다고 할 수 있다.
PC　(1) $(p \supset \sim p) \supset \sim p$
(1)×DR1　(2) $L(p \supset \sim p) \supset L \sim p$
K* [$\sim p/q$]　(3) $(Lp \supset L \sim p) \supset L(p \supset \sim p)$
(2),(3)×Syll　(4) $(Lp \supset L \sim p) \supset L \sim p$
PC　(5) $((p \supset q) \supset q) \supset (\sim q \supset p)$
(5)[$Lp/p,L \sim p/q$]
　(6) $((Lp \supset L \sim p) \supset L \sim p) \supset (\sim L \sim p \supset Lp)$
(4,(6)×MP　(7) $Mp \supset Lp$
(7),T1×Syll　(8) $p \supset Lp$ …… PC 붕괴

3.16 S5에 공리 * $LMp \supset MLp$를 덧붙여서 생기는 체계는 PC로 붕괴함을 보여라.

새로 생긴 체계에서 $p \supset Lp$라는 정리가 있다면, PC로 붕괴한다고 할 수 있다.
B　(1) $p \supset LMp$
B1　(2) $MLp \supset p$
(1),(2)×Syll　(3) $MLp \supset LMp$
(3),*×PC　(4) $MLp \equiv LMp$
S5(3)　(5) $Lp \equiv MLp$
S5(2)　(6) $Mp \equiv LMp$
(4),(5),(6)×Eq:　(7) $Lp \equiv Mp$
(7),T1×Eq:　(8) $p \supset Lp$ …… PC 붕괴

3.17 K + $p \supset Lp$는 하나의 세계만을 포함하고 있는 2개의 틀로 구성된 집합의 관점에서 건전하다는 사실을 보여라.

$p \supset Lp$에 대해서 타당성을 검토해보자.
(i) 자신을 볼 경우 : p가 참이면 Lp도 참이 되므로 $p \supset Lp$는 성공. p가 거짓이면 자동으로 $p \supset Lp$는 성공. 따라서 이 설정에서 $p \supset Lp$는 항상 타당하다.
(ii) 자신을 보지 못할 경우 : 후건인 Lp가 항상 참이 되므로, $p \supset Lp$는 이 설정에서 항상 타당하다.
(i)과 (ii)에 의해 문제에서 제시한 프레임 집합에 대해 K+ $p \supset Lp$는 건전하다.

3.18 p.66의 보조 정리 3.1에 대한 증명에서 (ii)와 (iii)의 경우에 대한 추리 단계를 완전히 기술하라.

(3장 연습문제 끝)